ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0).$$

Μονάδες 7

Α2. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α και A_1 το σύνολο των σημείων του Α στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Πώς ορίζεται η πρώτη παράγωγος της f;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

Μονάδες 4

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f με $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty$ ή $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=-\infty$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.

(μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (**α**).

(μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α5. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***ΣΩΣΤΟ****, αν η πρόταση είναι* ***σωστή****, ή* ***ΛΑΘΟΣ*** *αν η πρόταση είναι* ***λανθασμένη****.*

α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $f(x)>0$ για κάθε x κοντά στο x_0.

β) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β], παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, τότε $f(\alpha)\neq f(\beta)$.

γ) Για κάθε συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-3}$, $x \in \mathbb{R} - \{3\}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται στο $\mathbb{R} - \{3\}$.

Μονάδες 5

Β2. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες.

Μονάδες 8

Β3. Να αποδείξετε ότι $(f \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{3\}$.

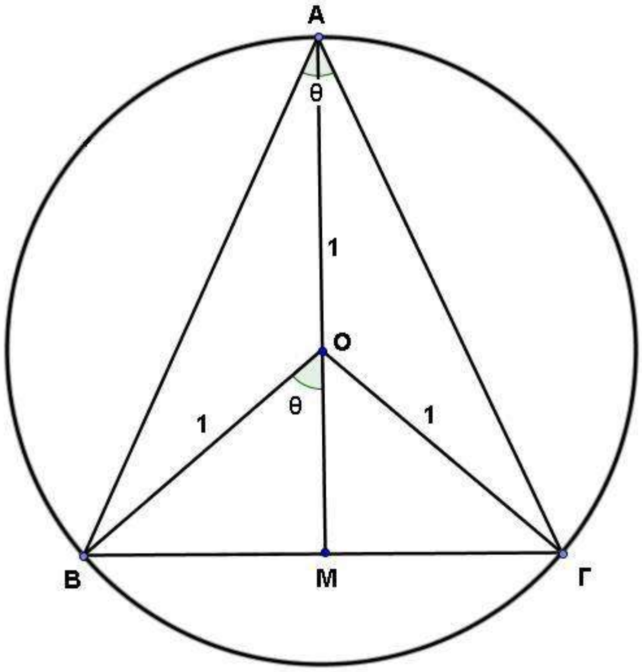
Μονάδες 6

Β4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} \left(f(x)\, \text{ημ}\dfrac{1}{3x+1} \right)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα 1, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν θ είναι η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών του τριγώνου και $B\hat{O}M = \theta$, τότε:



Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση της γωνίας θ είναι:
$E(\theta) = (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta,\ \theta \in (0, \pi)$.

Μονάδες 5

Γ2. Να βρείτε την τιμή της γωνίας $\theta \in (0, \pi)$, για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου μεγιστοποιείται.

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δυο γωνίες $\theta_1,\ \theta_2$, με $\theta_1 < \theta_2$, για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου ισούται με $\frac{3}{4}$.

Μονάδες 6

Γ4. Για τις γωνίες $\theta_1,\ \theta_2$, του ερωτήματος **Γ3**, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, \pi)$ τέτοια, ώστε:

$$\left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right)E'(\xi_1) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right)E'(\xi_2).$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f(x) = x\ell nx - \ell n(\lambda x)$, $\quad x \in (0, +\infty)$, $\lambda \in (0, +\infty)$ και

$g(x) = x^x$, $\quad x \in (0, +\infty)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 1$, το οποίο και να βρείτε. Στην συνέχεια, να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκει το σημείο ακρότατου της f, καθώς το λ μεταβάλλεται στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 5

Δ2. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $\lambda > 0$ για την οποία ισχύει

$$x^x \geq \lambda x, \text{ για κάθε } x>0.$$

Μονάδες 5

Για τα ερωτήματα Δ3 και Δ4 θεωρήστε ότι $\lambda = 1$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \lambda x$ είναι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_g της g, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 6

Δ4. Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} x^x, & x > 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

Να αποδείξετε ότι:

i. Η h είναι συνεχής

(Μονάδες 3)

ii. Η εξίσωση

$$x^{2020}\left(3 - 2\int_1^2 g(t)dt\right) + (1 - x)\int_0^1 h(1 - t)dt = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, 1).

(Μονάδες 6)

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ